

# ముగ్గులు

జెజ్జాల కృష్ణ మోహన రావు



**J K Mohana Rao**  
**1593 Elmwood Court**  
**Frederick, MD 21702**

**Phone: (301) 695 5932 - Home**  
**E-mail: [jkmrao@yahoo.com](mailto:jkmrao@yahoo.com)**

# ముగ్గులు

## పరిచయము

చిన్నప్పటినుండి నాకు ముగ్గులంటే ఎంతో ఇష్టము. ఇంటిలో నా ఆమ్మ, ఆక్కలు ముగ్గులు వేస్తుంటే చూచి ఆనందించేవాణ్ణి. ముగ్గులోని చుక్కలు, దానిని కలిపే విధము, ముగ్గుపొడి చేతి వ్రేళ్ళనుండి ఒకే పరిమాణములో జారుతూ ఉండడము, ముగ్గులో మధ్యమధ్య ఎర్రమట్టి పులుమడము - ఇవన్నీ ఎప్పుడూ కొత్తగా ఉండేవి, ఎన్ని సారులు చూచినా మరలా మరలా చూడాలని ఉండేది. నేను విద్యావంతుడైన డాక్టర్ పట్టానికై రిసర్చ్ చేసేటప్పుడు ముగ్గులలోని ఆసక్తి ఇంకా ఎక్కువైనది. దానికి కారణము ఏమనగా - నేను అప్పుడు (ఇప్పుడు కూడ) స్పటికశాస్త్రములో పరిశోధన చేసే వాడిని. ఆ శాస్త్రములో సౌష్ఠవానికి, సామ్యరూపానికి ఒక ప్రధాన స్థానము ఉంది. అప్పటినుండి ముగ్గులను శాస్త్రీయ దృష్ట్యా పరిశీలించడము ప్రారంభించాను. తరువాత ఛందస్సులో బంధకవిత్వములోని చిత్రాలను గమనించేటప్పుడు అందులో కూడ ముగ్గువలె కొన్ని అమరికలు నన్ను ఆకర్షితుడిని చేసినది. ఈ నా చిన్న వ్యాసములో ముగ్గులను శాస్త్రీయ రీతులలో అర్థము చేసుకొనే విధాన్ని తెలుపుటకు ప్రయత్నిస్తాను. వ్యాసము చివర ఒక రెండు బంధకవిత్వాలను మీముండు ఉంచుతాను. ముగ్గు ఒక కళ, ముగ్గు ఒక శాస్త్రము, ముగ్గు ఒక చిత్రకవిత్వము అని నిరూపించుటయే నా కృషి.

## ముగ్గులకు ఎన్ని పేరులో?

భారతదేశములో అన్ని ప్రాంతాలలో హిందువుల గృహాలలో, దేవాలయాలలో, పండుగలలో, నాట్యప్రదర్శనలలో ముగ్గులను మనము చూడగలము. వేరువేరు ప్రాంతాలలో వేరువేరు పేరులున్నాయి దీనికి. తెలుగువాళ్ళు ముగ్గు (లేక మ్రుగ్గు) అంటే తమిళులు కోలం అంటారు. కన్నడిగులు రంగోలి లేక రంగవల్లి అంటే, కేరళ దేశస్థులు పూక్కళం లేక పూవిడల్ అని పిలుస్తారు. మధ్యప్రదేశములో చౌక్ పూర్ణ, మందన అని పేరు దీనికి. మిథిలలో అరిపిన అంటే వంగదేశములో అల్పనా అంటారు. ఓడ్ర దేశములో ఒస్సా లేక చిత్తా అంటారు. ఉత్తరప్రదేశములో లిఖ్నా సోనా అని, గుజరాత్ లో సథియా అని పిలుస్తారు. మణిపురిలో పాకంభ అంటారు. ఇలా వివిధనామాలతో విరాజిల్లుతుంది ముగ్గు.

## ముగ్గులను ఎలా వేస్తారు?

ముగ్గును సామాన్యముగా ముగ్గుపొడితో వేస్తారు. ముగ్గుపొడి పిండి చేయబడిన మెత్తటి రాయి. పిండిముగ్గును బియ్యపు పిండితో, పసుపుపొడితో, కుంకుమతో వేస్తారు. ముగ్గును రంగురంగుల ఇసుకతో కూడ వేయవచ్చును. తెల్లటి లేక రంగుల సుద్దముక్కలతో వేయవచ్చును. పూలను, పూలరేకులను, ఎండిన ఆకులను కూడ వేసిన ముగ్గులలో నింపవచ్చును. ముగ్గులను నేలపైన వేయవచ్చు, గోడలపై వేయవచ్చు. ముగ్గులు వేసిన శిలాఫలకాలు, జిగురు కాగితాలు కూడ ఉన్నాయి. ముగ్గుల పళ్ళాలను, ముగ్గుల గొట్టాలను కూడ అమ్ముతారు. ముగ్గుల నమూనాలతో బట్టలు, చీరలు కూడ ఉన్నాయి. పేడ, ఎర్రమన్ను, గోరింట కూడ ముగ్గులను నింపడానికి ఉపయోగిస్తారు.

## సాహిత్యములో ముగ్గులు

మొట్టమొదట ముగ్గు ఎలా పుట్టిందనే ఒక కథ ఉన్నది. ఎవరో రాజకుమారుడు ఒకడు చనిపోయాడట. వాడిని బ్రతింపజేయాలని బ్రహ్మదేవుడిని అడిగితే, వాడి చిత్తరువు ఉంటే అందులో ప్రాణము మళ్ళి పోయగలను అన్నాడట. ఆ రాజకుమారుని రేఖాచిత్రాన్ని గీచారట. అదియే మొదటి ముగ్గుని చిత్రలక్షణము అనే గ్రంథములో పేర్కొనబడినదని నేను చదివయున్నాను.

ముగ్గును గురించి తెలుగు సాహిత్యములో కూడ ప్రసక్తి ఉన్నది. క్రీడాభిరామము, ఆముక్తమాల్యదల నుండి రెండు పద్యములు-

చందనంబున గలయంపి చల్లినారు

ఘ్రుగు లిడినారు కాశ్మీర సముచయమున

వ్రాసినారు రిందు రజమున రంగవల్లి

కంజముల దోరణంబులు గట్టినారు - వినుకొండ వల్లభరాయడు, క్రీడాభిరామము, 178

బోటి గట్టిన చెంగల్వపూవుబొత్తు

దరు పరిణ తోరు కదలి మంజరియు గొనుచు

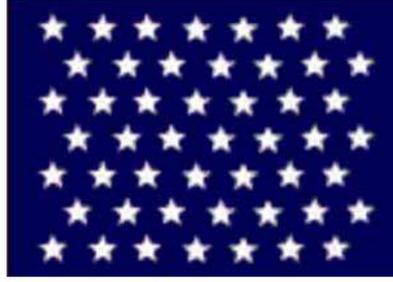
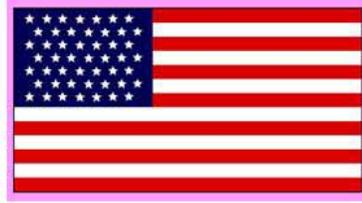
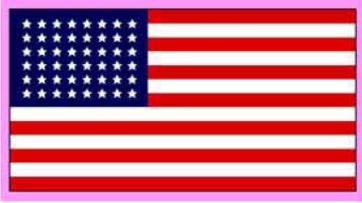
బోయి గుడి నంబి విజనంబు జేయ బొచ్చి

మ్రొక్కి వేదిక బలువన్నె ఘ్రుగు బెట్టి - శ్రీకృష్ణదేవరాయలు, ఆముక్తమాల్యద, 5.91

## ముగ్గు చుక్కలు

సామాన్యముగా మన ఇళ్ళల్లో ఆడువారు ముగ్గులను వేసేటప్పుడు మొదట చుక్కలు వేసి, ఆ చుక్కలను కలిపి ఒక ఆకృతిని కల్పిస్తారు. ఒక్కొక్క ముగ్గుకు ఒక్కొక్క విధముగా చుక్కలు పెట్టాలి. అన్ని ముగ్గులకు ఈ చుక్కలు రెండు విధాలుగా ఉంటాయి- (1) చుక్కలు చతురస్రముగా ఉంటాయి (square grid) (2) చుక్కలు త్రిసమముగా ఉంటాయి (isometric grid). ఆమెరికా సంయుక్త రాష్ట్రాల జాతీయ పతాకములో ఎడమవైపు పై భాగములో నక్షత్రాలు ఉన్నాయి. దాని సంఖ్య దేశములోని రాష్ట్రముల సంఖ్య, ఒక్కొక్క రాష్ట్రానికి ఒక నక్షత్రము అన్న మాట. 1956కు ముందు (ద్వితీయ ప్రపంచ సంగ్రామ కాలములో) 48 నక్షత్రాలు ఉండేవి. అప్పటి నక్షత్రాల అమరిక ఒక దీర్ఘచతురస్రాకృతిలో అడ్డముగా, నిలువుగా ఉండే నక్షత్రాలు. ఈ అమరికను మీరు ఒకటవ చిత్రములో ఎడమవైపు చూడగలరు. ఇప్పుడు ఈ దేశములో 50 రాష్ట్రాలు ఉన్నాయి. వాటి అమరిక త్రిసమాకృతిలో అనగా అడ్డముగా ఒక శ్రేణిలో కొన్ని నక్షత్రాలుంటే తరువాతి శ్రేణిలోని నక్షత్రాలు పై నక్షత్రాలకు మధ్యగా ఉంటాయి. వీటిని మీరు 1వ చిత్రములో కుడివైపు చూడగలరు. ముగ్గు చుక్కల అమరిక ఇలాగే ఉంటాయి.

## చిత్రము 1



For display of symmetry  
in 1, 2 and 4

For display of symmetry  
in 3 and 6

చతురస్ర (square), దీర్ఘచతురస్రముల (rectangular) సామ్యరూపములను నిలువు అడ్డ చుక్కలతో (square grid) చిత్రించ వీలగును. త్రిభుజ, షడ్భుజముల సామ్యరూపములను త్రిసమాకృతిలో గల చుక్కలతో (isometric grid) వేయవచ్చును.

## సామ్యరూపము, సౌష్ఠ్యము

ఆంగ్లములోని సిమెట్రీ (symmetry) పదానికి సౌష్ఠ్యము లేక సామ్యరూపము అను పదములను ఉపయోగించవచ్చును. సామాన్యముగా సౌష్ఠ్యము అనే పదాన్ని ఉపయోగించినా, నాకేమో ఆ పదము అంతగా రుచించలేదు. ఎందుకంటే సౌష్ఠ్యము సౌందర్యాన్ని చూపిస్తుందే గాని సమరూప నిర్మాణాన్ని నొక్కి చెప్పదు.

ఈ సామ్యరూపమనేది మూడు విధాలు-

(1) సమాంతర పరివర్తన (translation) - ఒక దాని ప్రక్క ఒకటి వరుసగా తంతి స్తంభాలు ఉన్నాయనుకొండి, అవి సమాంతర లేక స్థానాంతర పరివర్తనను తెలియజేస్తుంది. రెండు స్తంభాల మధ్య ఉన్న దూరము ఒక వంద గజాలనుకొంటే, ఒక స్తంభమునుండి ఒక వంద గజాలు నడిస్తే మనకు మరొక స్తంభము వస్తుంది. ఈ రెండు స్తంభాల మధ్య తేడా ఏమియు లేదు. ఇదియే సమాంతర పరివర్తనా సామ్యరూపము.

(2) పరిభ్రమణము (rotation) - ఒక చతురస్రము ఉందనుకొండి. అన్ని భుజాలు ఒకే విధముగా ఉంటాయి దానికి. ఒక 90 డిగ్రీలు లేక అంకాలు దానిని త్రిప్పితే మనకు లభించే ఆకారము ముందున్న ఆకారానికన్న విభిన్నము కాదు. ఈ ఉదాహరణలోని 90 డిగ్రీలను పరిభ్రమణ కోణము (angle of rotation) అని అంటారు. పరిభ్రమణమునకు ఎల్లవేళలలో ఒక అక్షము ఉండాలి, దానికి పరిభ్రమణాక్షము (axis of rotation) అని పేరు.

(3) దర్పణము (reflection) - రెండు ఒకే విధమైన రూపాలు ఒక దానికి ఎదురుగా ఇంకొకటి ఉంటే మనకు లభించేది దర్పణ సాదృశ్యము. మనము అద్దము ముందు నిలిస్తే మనకు కనిపించే మన ప్రతిబింబము వంటిది ఇది. మనము వాడే అద్దములోని ప్రతిబింబము వాస్తవము కాదు, మిథ్యా ప్రతిబింబము. దర్పణ సాదృశ్యములోని బింబప్రతిబింబాలు రెండు కూడ వాస్తవమే (real images). రెండు రూపాలలో ఒక దానికి మరొకటి తలక్రిందులుగా ఉందనుకొనండి, దీనికి విలోమసాదృశ్యము

(inversion symmetry) అని పేరు. ఇది దర్పణ సాదృశ్యముయొక్క మరొక రూపము.

$z$  అక్షముతో  $180$  డిగ్రీల పరిభ్రమణములో నిరూపకాలైన (coordinates)  $x, y, z$  లు  $-x, -y, z$  గా మారుతాయి.  $yz$  ఫలకము అద్దమైతే  $x, y, z$  లు  $-x, y, z$  అవుతుంది. విలోమబిందువు (inversion centre)  $x, y, z$  ను  $-x, -y, -z$  గా మార్చును.

సమాంతర పరివర్తనతో పరిభ్రమణము కూడ ఉండాలంటే మనకు లభించే పరిభ్రమణ కోణాలు ఐదు మాత్రమే, అవి  $-60, 90, 120, 180, 360$  డిగ్రీలు. వీటి సామ్యరూపాలు షడావృత్తము (six-fold), చతురావృత్తము (four-fold), త్రిరావృత్తము (three-fold), ద్వీరావృత్తము (two-fold), ఏకావృత్తము (uni-fold). ఇందులో పంచావృత్త సామ్యరూపము (five-fold symmetry) లేదన్నది గమనీయార్హము. ప్రకృతిలో ఇట్టి సౌష్ఠ్యము ఉన్నది, ఉదాహరణకు చాల పూలలో ఐదు రేకులు ఉంటాయి. కాని సమాంతర పరివర్తన ఉన్నప్పుడు ఈ  $72$  డిగ్రీల భ్రమణాక్షము లోపిస్తుంది.

## వర్గములు

పరిభ్రమణ, దర్పణ, విలోమ సాదృశ్యాల కలయికతో నున్న సామ్యరూపాలకు బిందువర్గాలు (point groups) అని పేరు. ఇవి త్రిమితీయ పరిమాణములో  $32$ , సమతలములో  $17$ . ఇక్కడ వర్గము అంటే ఏమి? కొన్ని మూలకములు (elements) క్రింద ఇచ్చిన నియమములను అనుసరించినయెడల అవి ఒక వర్గమునకు చెందును.

(1) ప్రతి వర్గములో రెండు మూలకాల ప్రయోగము ద్వారా వచ్చు మూడవ మూలకము వర్గములోని మరొక మూలకముగా ఉండాలి. ( $a \cdot b = c$ , where  $c$  is another element belonging to the group.) . ఈ ప్రయోగమును గుణకారము అనుట వాడుక.

(2) ప్రతి వర్గములో ఒక మూలకమును రెండవ మూలకముపై ప్రయోగించగా వచ్చిన ఫలితము ఆ రెండవ మూలకమును మొదటి మూలకముపై ప్రయోగించగా వచ్చిన ఫలితమునకు కొన్ని సందర్భములలో తప్ప మిగిలిన సమయములలో భిన్నముగా నుండును. ( $a \cdot b$  is generally not equal to  $b \cdot a$ )

(3) ప్రతి వర్గమునకు ఒక సర్వసమతమూలకము ఉండును. (identity element)

(4) ప్రతి మూలకమునకు ఒక విలోమ (inverse) మూలకము ఉండును. మూలక

విలోమమూలకముల ప్రయోగమువలన సర్వసమతమూలకము లభించును. (**a . inverse of a = identity element**)

ప్రతి వర్గానికి ఒక వర్గ గుణకార పట్టిక (**group multiplication table**) గలదు. ఒక మూలకమును మరొక మూలకముపై ప్రయోగించగా వచ్చే ఫలితమును ఇది తెలుపుతుంది. 120 డిగ్రీల పరిభ్రమణము ఉన్నదంటే, అందులోని మూలకాలు 120, 240, 360 డిగ్రీల పరిభ్రమణాలు. పీనిని క, చ, ట అని అనుకొందాము. అప్పుడు ఈ వర్గానికి గుణకార పట్టిక క్రింది విధముగా ఉంటుంది-

	క	చ	ట
క	క	ట	చ
చ	ట	చ	క
ట	చ	క	ట

దీనిని పరిశీలించినయెడల, అడ్డముగా గాని, నిలువుగా గాని అన్ని మూలకాలు ఒకే మారు కనిపిస్తుంది. క, చ ల గుణకారము చ, క ల గుణకారము ఒకటే. కాని ఇలా ఎల్ల వేళలా ఉండదు.

పైన పరిచయము చేసిన గణిత విషయాలతో కొన్ని ముగ్గులను పరిశీలిద్దామా?

### సమతల పరిభ్రమణవర్గములు

సమతలములో (**plane**) రెండు పరిమాణములు (**two dimensions**) మాత్రమే ఉండును. ఇట్టి సమతలములో సమాంతర పరివర్తన (**translation**) లేనిచో మనకు పది వర్గములు లభించును. అవి- 1 (360 డిగ్రీల పరిభ్రమణము, అనగా ఇందులో ఎట్టి సౌష్ఠవము ఉండదు), 2 (180 డిగ్రీల పరిభ్రమణము), **m** (దర్పణ సాదృశ్యము, **m** అనగా **mirror**), **2mm** (180 డిగ్రీల పరిభ్రమణముతోబాటు 2 దర్పణములు కూడ ఇందులో గలవు), 3 (120 డిగ్రీల పరిభ్రమణము), **3m** (120 డిగ్రీల పరిభ్రమణముతో మూడు దర్పణములు కూడ ఇందులో గలవు), 4 (90 డిగ్రీల పరిభ్రమణము), **4mm** (90 డిగ్రీల పరిభ్రమణముతోబాటు 4 దర్పణములు), 6 (60 డిగ్రీల పరిభ్రమణము), **6mm** (60 డిగ్రీల పరిభ్రమణముతోబాటు 6 దర్పణములు). ఇందులో పరిభ్రమణాక్షము కారితమునకు లంబముగా నుండును (**The axis of rotation is perpendicular to the plane of the paper**). దర్పణతలములు కూడ కారితమునకు లంబముగా నుండును (**The**

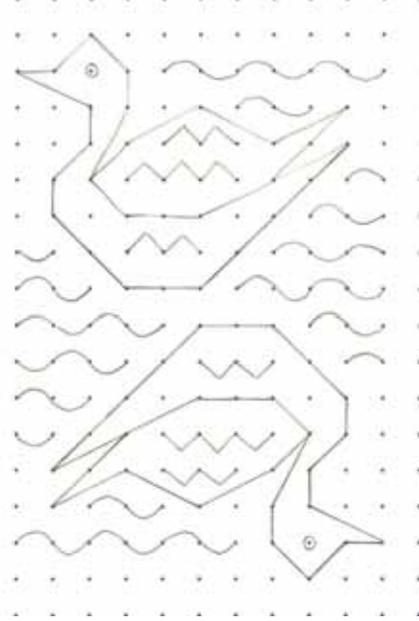
mirror planes are perpendicular to the horizontal plane of the paper . )

సమతల సామ్యరూప వర్ణము 1 సౌష్ఠవ రహితము, నా పేరిని తెలుగులో వ్రాసినాను ఉదాహరణగా (చిత్రము 2) .

చిత్రము 2



చిత్రము 3

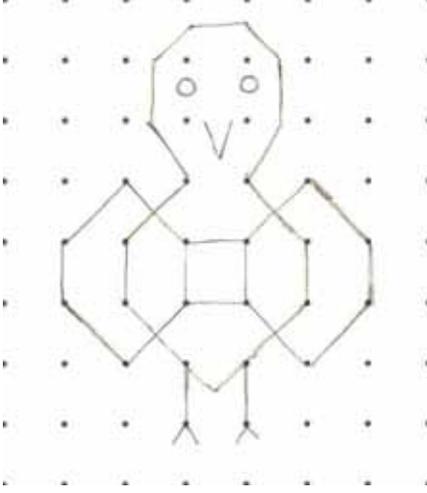


సమతల సామ్యరూప వర్ణము 2 ను 3వ చిత్రములో చూడగలరు. ఇందులో 180 డిగ్రీల పరిభ్రమణమువలన పైన ఉన్న హంస క్రిందికి, క్రింద ఉన్న హంస పైకి వెళ్ళును. నేను ఈ పరిభ్రమణము చేయడానికి ముందు మిమ్మలిని బయటకు పంపి ఈ 180 డిగ్రీలకు కాగితమును త్రిప్పి మిమ్ములను లోనికి రప్పించినప్పుడు మీరు ఇందులోని తేడాను కనుగొనలేరు. అనగా చిత్రము తలక్రిందులైనది ఈ సౌష్ఠవములో.

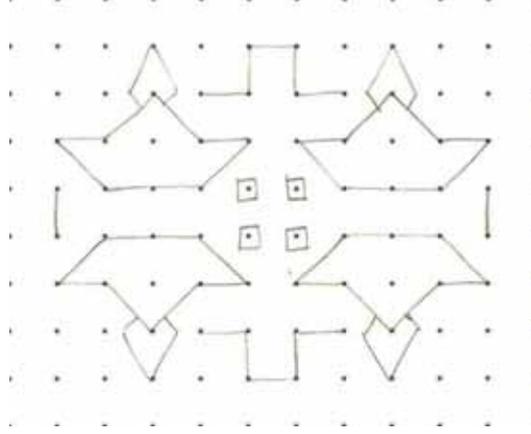
సమతల సామ్యరూప వర్ణము m ను 4వ చిత్రములో చూపబడినది. ఇందులోని అద్దము నిలువుగా నున్నది. సమతల సామ్యరూప వర్ణము 2mm ను 5వ చిత్రములో చూడగలరు. ఇందులో రెండు అద్దములు ఉన్నవి. అవి ఒకదానికి మరొకటి లంబముగా నున్నది. ఒకటి నిలువుగా మరొకటి

అడ్డముగా నున్నది.

చిత్రము 4

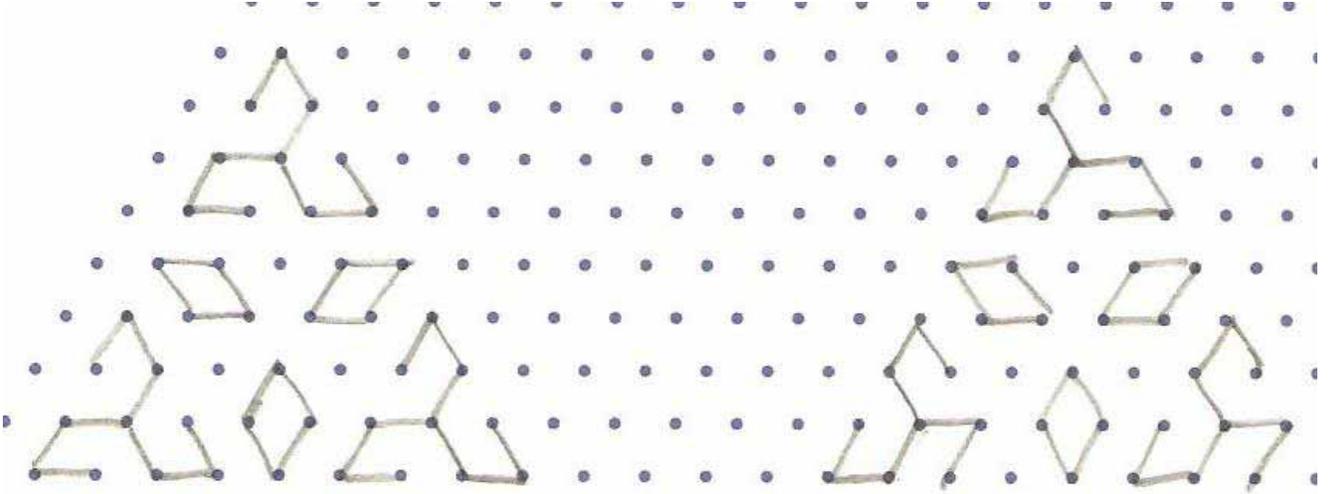


చిత్రము 5

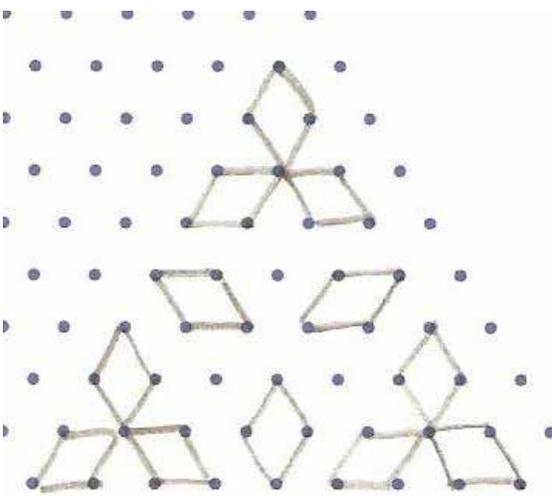


సమతల సామ్యరూప వర్గము 3 ను 6వ చిత్రములో చూడగలరు. ఇందులో 120 డిగ్రీల పరిభ్రమణము ఉన్నది. కుడివైపు చిత్రము ఎడమ నున్న చిత్రానికి ప్రతిబింబము. ఇట్టి వర్గములకు సవ్యాపసవ్య గుణము (handedness) గలదు. మాంసకృత్తులలో, DNAలో గల రసాయనములకు ఇట్టి సవ్యాపసవ్యా గుణము గలదు, కావున ఇవి దర్పణ గుణము గల వర్గములలో స్ఫటికీకరించవు.

చిత్రము 6



చిత్రము 7



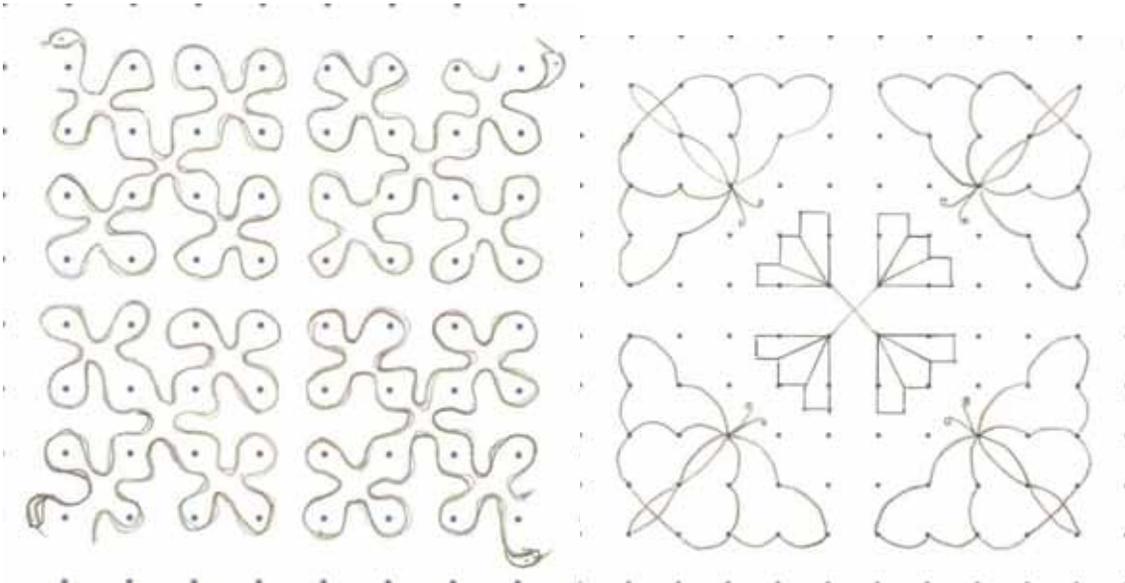
సమతల సామ్యరూప వర్గము 3m ను 7వ చిత్రములో చూడగలరు. ఇందులో 120 డిగ్రీల పరిభ్రమణముతోబాటు మూడు దర్పణములు కూడ ఉన్నవి. ఈ చిత్రమును వ్రాయునప్పుడు నేను డయమండ్ను పూర్తిగా గీచినాను. ఆరవ చిత్రములో అది అసంపూర్ణము.

సమతల సామ్యరూప వర్గము 4 ను 8వ చిత్రములో చూడగలరు. దీనికి కూడ సవ్యాపసవ్య గుణము గలదు. ఈ చిత్రములో మరొక విశేషమును గమనించవలెను. నాలుగు పాములకు చతురావృత్త సామ్యరూపము ఉన్నది. ప్రతి పాముకు కూడ సుమారైన చతురావృత్త సౌష్ఠవము ఉన్నది. ఇట్టి సామ్యరూపమును అసంపూర్ణ సామ్యరూపము (pseudo-symmetry) అంటారు.

సమతల సామ్యరూప వర్గము 4mm ను 9వ చిత్రములో చూడగలరు. ఇందులో 90 డిగ్రీల పరిభ్రమణముతో సహా నాలుగు దర్పణములు కూడ ఉన్నవి. రెండు దర్పణములు నిలువుగా, అడ్డముగా, మరి రెండు వికర్ణముగా (diagonal) గలవు.

చిత్రము 8

చిత్రము 9



సమతల సామ్యరూప వర్గము 6 ను 10వ చిత్రములలో చూడగలరు. ఈ వర్గమునకు కూడ సవ్యాపసవ్య గుణము గలదు. రెండు చిత్రములు ఒకదాని కింకొకటి ప్రతిబింబము. ఆంగ్ల అక్షరము S

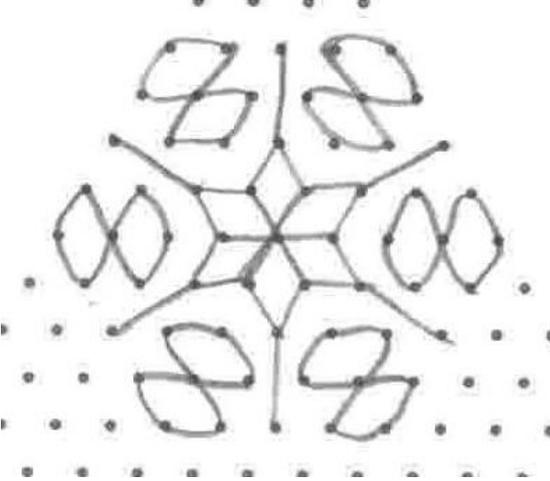
వంటిది కుడి చిత్రములో చిన్న పిల్లలు అక్షరాలు నేర్చుకొనేటప్పుడు వ్రాసేటట్లు ఉన్నది!

సమతల సామ్యరూప వర్ణము 6mm ను 11వ చిత్రములో చూడగలరు. 10వ చిత్రములోని S ఇందులో 8 అంకె వలె నున్నది. ఇండులో 60 డిగ్రీల భ్రమణముతోబాటు 6 దర్పణములు కూడ ఉన్నవి.

చిత్రము 10



చిత్రము 11



మీరు చదివిన పై విషయాలతో 12, 13 చిత్రములలో గల ముగ్గులను శాస్త్రీయ రీత్యా పరిశీలించండి చూద్దాము.

చిత్రము 12

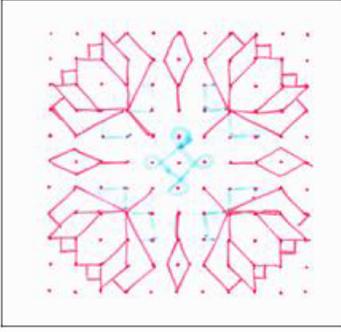
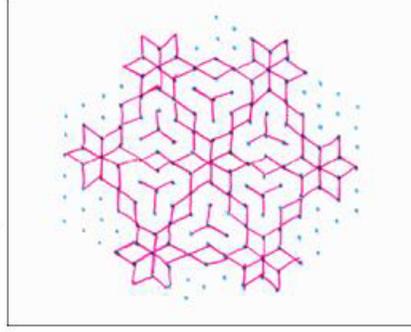
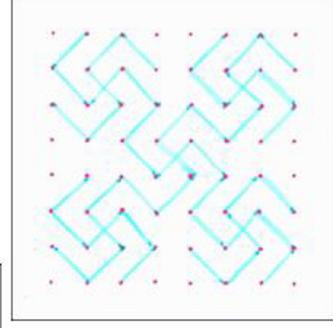


*Rangavalli –  
Floral Drawing*



చిత్రము 13

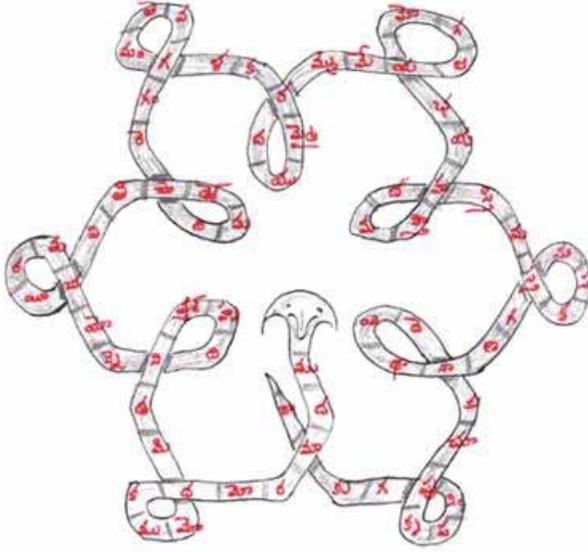
**Rangavalli**



**Indian Floral Drawing**

బంధకవిత్వముతో ప్రార్థనా చిత్రాలు

ముగ్గుల ద్వారా మనము ఎంతయో శాస్త్రీయ విజ్ఞానమును నేర్చుకొన పీలగునని మీకు తెలియబరచాను. ముగ్గులనుగుణించి Painted Prayers అని ఒక పుస్తకము ఉన్నది. ముగ్గులు ప్రార్థనా చిత్రాలని రచయిత అభిప్రాయము. చిత్రకవిత్వములో నాకు ఆసక్తి ఎక్కువ. చిత్రకవిత్వములో ఒకటి బంధకవిత్వము. ఇందులో ఒక వృత్తమును ఒక చిత్రములో ఇమిడేటట్లు వ్రాయాలి. కొన్ని అక్షరాలు ఒక సారి కన్న ఎక్కువగా వాడబడుతాయి. పాములా చిత్రము ఉంటే అది నాగబంధము, చక్రములా చిత్రము ఉంటే అది చక్రబంధము. నేను మనము వేసే ముగ్గులా ఉన్న రెండు చిత్రాలలో వ్రాసిన బంధకవిత్వమును 14వ, 15వ చిత్రాలలో చూడవచ్చును.



చిత్రము 14

నవనందిని-

ముదమార మోదకము

మోద మిడ నిత్తున్

హృది నిన్నె యో వతుర

యూ వలితి పాడెన్

మది పాలె గంగవతె

మంగళకరమ్మె

యుదర మ్మేయ జగ

మో యభయహస్తా

మదహస్తమస్తక స-

మస్తగణనాథా

యిది నాకు చూపు కృప

నింపుర కుమారా

